Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio

2ª Lista de Exercícios - Análise Matemática II

Prof. André L. M. Martinez

1. A fim de que $f : X \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista uma função $\eta : X \to \mathbb{R}$, contínua no ponto a, tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x-a)$ para todo $x \in X$.

2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'$, com $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$ prove que g é derivável nesse ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

3. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ chama-se par quando $f(-x) = f(x)$ e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$. Prove que $f(x) = f'(0).x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Mais geralmente, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é k vezes derivável e $f(tx) = t^k.f(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}$, prove que $f(x) = [f^{(k)}(0)/k!].x^k$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a,b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, prove que f é crescente.

6. Se $f : I \to \mathbb{R}$ cumpre $|f(y) - f(x)| \leq c|y-x|^\alpha$ com $\alpha > 1, c \in \mathbb{R}$ e $x, y \in I$ arbitrários, prove que f é constante.

7. Suponha que $g(t)$ seja uma primitiva de $f(t)$ em $[0,1]$, isto é, para todo t em $[0,1]$, $g'(t) = f(t)$. Suponha, ainda, que $f(t) < 1$ em $(0,1)$. Prove que
$$g(t) - g(0) < t, \text{ em } (0,1].$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0 é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.
   (a) Determine os pontos fixos de $f(x) = x^2 - 3x$;
   (b) $f(x) = x^2 + 1$ admite ponto fixo;
   (c) Mostre que f terá ponto fixo se o gráfico de f interceptar a reta $y = x$.

9. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e derivável em p. Suponha $f'(p) > 0$. Prove que existe $r > 0$ tal que

$$f(x) > f(p) \text{ em } (p, p + r) \text{ e } f(x) < f(p) \text{ em } (p - r, p)$$

10. Seja f definida e derivável em $\mathbb{R}$ e sejam a e b raízes consecutivas de f. Mostre que $f(a).f(b) \leq 0$

11. Suponha que f derivável no intervalo I. Prove que se f for estritamente crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ em I.

12. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo da reta $y = x - 2$.

13. Mostre que, para todo $x \geq 0$, $e^x > x$.

14. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 4, de $f(x) = e^x$ em volta de $x_0 = 0$.

15. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

    (a) $\ln 1.3$
    (b) $\sqrt{4.1}$
    (c) $\sqrt{3.9}$
    (d) $\text{sen}0.1$

16. Mostre que, para todo x,

    (a) $|\text{sen}x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3$
    (b) $\left|\cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| \leq \dfrac{1}{2}x^3.$

17. Utilizando a relação $\text{sen}x = x + o(x^2)$, calcule

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x - x}{x^2}$
    (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}x - x^2}{x^2}$

18. Mostre que o número e é irracional.

19. Dê uma demonstração de que $f'' \geq 0$ então f é convexa usando a fórmula de Taylor.

20. Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas.